



Основы теории цифровой обработки сигналов

Курс лекций

Составитель: ст. преподаватель, к.т.н. Гвинджилия Валерия Енвериевна

ФГБОУ ВО «Донской государственный технический университет»
Кафедра «Автоматизация производственных процессов»

Ростов-на-Дону, 2022

Список сокращений

АЦП – аналого-цифровой преобразователь

АЧХ – амплитудно-частотная характеристика

БИХ – бесконечная импульсная характеристика (тип фильтра)

БПФ – быстрое преобразование фурье

ДВПФ – дискретное по времени преобразование фурье

ДПФ – дискретное преобразование фурье

ДФ – дискретный фильтр

ИХ – импульсная характеристика

КИХ – конечная импульсная характеристика (тип фильтра)

КЧХ – комплексная частотная характеристика

МИП – модулированная импульсная последовательность

ПФ – полосовой фильтр

РФ – режекторный фильтр

ФВЧ – фильтр верхних частот

ФНЧ – фильтр нижних частот

ФЧХ – фазочастотная характеристика

ЦАП – цифроаналоговый преобразователь

ЦОС – цифровая обработка сигналов

ЦПГ – цифровой преобразователь гильберта

ЦФ – цифровой фильтр

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1. Аналоговые, дискретные и цифровые сигналы.....	5
2. Классификация цифровых систем. Структура системы цифровой обработки сигналов.....	12
3. Математическое описание дискретных сигналов. Теорема Уиттекера – Котельникова – Шеннона–Найквиста.....	16
4. Спектр дискретного сигнала.....	19
5. Двумерное преобразование Фурье.....	24
6. Z-преобразование и его свойства.....	28
7. Применения Z-преобразования.....	31
8. Фильтры в дискретных системах.....	33
9. Корреляционная обработка сигналов.....	41
10. Контрольные вопросы по темам дисциплины.....	46

Введение

Ежедневно в своей бытовой и профессиональной деятельности человек встречается с цифровой обработкой сигнала (ЦОС). Методы цифровой обработки сигналов нашли свое применение от сотовой связи, фото и видеосъемки до систем медицинской компьютерной диагностики и дистанционного зондирования Земли. Однако использование методов теории ЦОС невозможно без понимания основ предметной области, а именно ключевых понятий – сигнал, аналоговый и цифровой сигналы, структура системы цифровой обработки, дискретизация сигнала, а также методов математического описания дискретных сигналов и алгоритмов их обработки. В связи с этим в данном лекционном материале будут рассмотрены основные фундаментальные положения ЦОС, а именно:

- аналоговые, дискретные и цифровые сигналы и системы. Методы математического описания и анализа дискретных сигналов;
- базовые способы преобразования цифровых сигналов: Z-преобразование и преобразование Фурье;
- алгоритмы расчета цифровых фильтров;
- цифровой спектральный анализ.

В результате полученные знания и умения сформируют базу для изучения уже специальных разделов дисциплины. Материал курса разбит на **8** лекций, самостоятельное закрепление материала осуществляется посредством выполнения контрольных работ с помощью программного пакета для решения задач технических вычислений Matlab.

Курс лекций рекомендуется бакалаврам, обучающимся по направлению «Автоматизация производственных процессов», «Управление техническими системами», а также студентам других направлений и специальностей, в образовательных программах которых предусмотрено изучение дисциплины «Основы теории цифровой обработки сигналов».

1. Аналоговые, дискретные и цифровые сигналы

ЦОС – одна из наиболее быстро развивающихся отраслей современной электроники. Она применяется в любой области, где присутствует взаимодействие с цифровой информацией, наиболее популярными и приоритетными для технического развития Российской Федерации являются следующие направления.

Обработка речи / аудио:

- распознавание речи;
- синтез речи;
- озвучивание текста;
- цифровые аудиосистемы.

Обработка изображений:

- распознавание образов;
- машинное зрение;
- улучшение изображения;
- репродуцирование графического рукописного материала;
- анимация;
- обработка спутниковых снимков.

Инструментальные средства/контроль:

- спектральный анализ;
- контроль положения и скорости;
- снижение шума;
- обработка информации;
- безопасная связь.

Столь широкая область применения знаний дисциплины связана с ключевым понятием в теории ЦОС – *сигнал*. Общее определение *сигнала* рассматривает его, как любой физический процесс, передающий некую информацию о

явлении или объекте, соответственно сигналы могут быть представлены многими способами: теплом, напряжением, акустикой, вибрациями и т.д. Однако в рамках ЦОС мы абстрагируемся от конкретной физической величины и рассматриваем *сигнал* как функцию одной или нескольких переменных от некоторого непрерывного или дискретного аргумента (время, расстояние, порядковый номер, отсчёты и т.д.) вне физического контекста явления.

В этой главе рассматриваются основные понятия, связанные с аналоговым и цифровым сигналом, их связью и общая структура системы цифровой обработки сигналов. Центральное место отведено математическому описанию дискретных сигналов, как способу его теоретического изучения.

- Сигналом называется физический процесс, параметры которого изменяются в соответствии с передаваемым потоком данных о физическом явлении. Сигнал является материальным носителем информации. По способу представления сигналы разделяются на две группы – *случайные* и *детерминированные*.

Случайным сигналом или стохастическим называется функция времени, значения которой достоверно не известны, а лишь могут быть предсказаны с некоторой вероятностью, которая всегда будет меньше единицы.

Детерминированным или регулярным сигналом называют такие сигналы, значения которых в любой точке интервала времени можно определить или рассчитать заранее, имея математическую модель. В свою очередь детерминированные сигналы делятся на периодические и непериодические сигналы. Классификация сигналов на периодические и непериодические лишь указывает на форму сигнала (рис. 1), то есть повторяется ли он через некоторый промежуток времени (период сигнала) или нет:

$$s(t)=s(t+kT),$$

где k – любое целое число, T – период повторения.

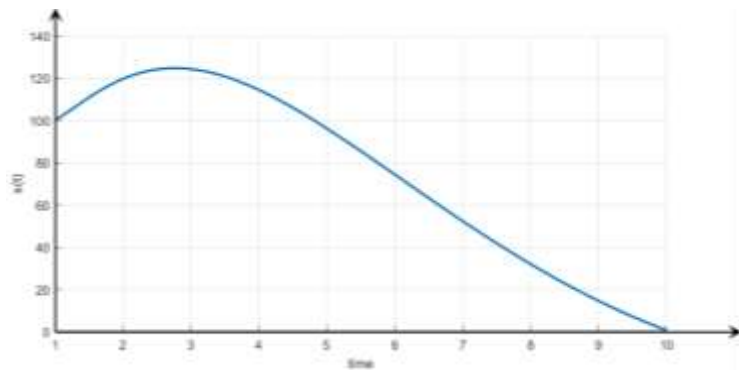
Пример периодического сигнала – гармоническое колебание, описываемое следующим выражением:

$$s(t)=A \cdot \cos(2\pi \cdot t \cdot T+\phi),$$

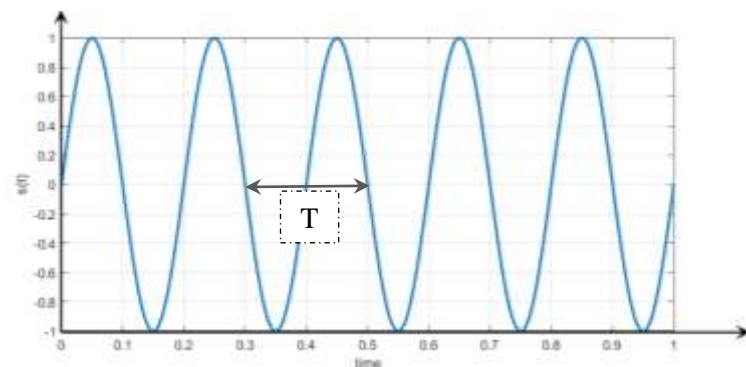
где A – амплитуда колебания, ϕ – начальная фаза.

Известно, что любой сложный периодический сигнал может быть представлен в виде суммы гармонических колебаний с частотами, кратными основной частоте $\omega = 2\pi/T$.

Детерминированный
непериодический
сигнал. Значение $s(t)$
известно в любой
момент t



Детерминированный
периодический сигнал



Случайный сигнал.
 Предсказать точное значение $s(t)$ невозможно

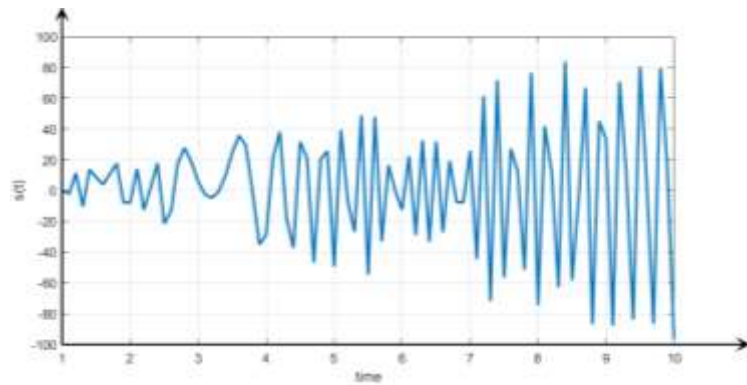


Рисунок 1 – Классификация сигналов по форме

В зависимости от математического описание функции сигнала его можно разделить еще на три ключевые группы (рис.3):

- аналоговые;
- дискретные;
- цифровые.

Аналоговый или *континуальный* называют сигнал, произвольный по величине и непрерывный во времени. Аналоговый сигнал $x(t)$ описывается непрерывной или кусочно-непрерывной функцией времени. Аргумент и сама функция принимают любые значения на интервале:

$$x_{min} \leq x \leq x_{max};$$

$$t_{min} \leq t \leq t_{max}.$$

Например: $x(t) = \exp(-at)$, $0 \leq t < \infty$.

Дискретный или *импульсный* сигнал может принимать произвольные по величине значения в дискретные моменты времени. Дискретный сигнал $x_d(t)$ описывается решетчатой функцией – последовательностью выборочных значений (отсчетов) в соответствующие моменты времени:

$$x_0 = x(t_0), x_1 = x(t_1), ..., x_n = x(t_n).$$

при постоянном интервале дискретизации

$$\Delta t = t_i - t_{i-1} = t_{i-1} - t_{i-2} = ... = T_{д}$$

где T_d – период дискретизации, а величина обратная ей частота дискретизации:

$$f_d = \frac{1}{T_d} = \frac{1}{\Delta t} = \omega_d.$$

В этом случае значения решетчатой функции записываются как $x(nT_d)$, $x(n)$ или просто x_n . Таким образом, дискретный сигнал задается как $x_d(t) = \{(x(nT_d))\}$, а переход от аналогового сигнала к дискретному, при котором из заданного аналогового сигнала выборочно определяется последовательность значений, взятая в определенные равноудаленные друг от друга моменты времени

$x(t) \rightarrow x_d(t_n)$, причем $x_d(nT_d) = x(nT_d)$, называется операцией дискретизации. Рассматривая пример, когда $x(t) = \exp(-at)$, $0 \leq t < \infty$, операция дискретизации будет иметь следующий вид $x_d(n) = x_d(nT_d) = \exp(-anT_d)$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Обратный переход – операция восстановления – состоит в том, что заданному дискретному сигналу ставится в соответствие аналоговый сигнал: $x_d(t_n) \rightarrow x(t)$, причем $x(nT_d) = x_d(nT_d)$. Операции дискретизации и восстановления являются взаимнообратными в случае выполнения условий Теоремы отсчётов Уиттакера — Найквиста — Котельникова — Шеннона (также Теорема Котельникова).

Теорема 1. Любой непрерывный сигнал с ограниченным спектром может быть восстановлен однозначно и без потерь по своим дискретным отсчетам, взятым с частотой строго больше удвоенной верхней частоты спектра непрерывного сигнала:

$$f_d \geq 2 \cdot f_v, \quad (1)$$

где f_v – максимальная (верхняя) частота непрерывного сигнала $x(t)$ с ограниченным по частоте (финитным) спектром, то есть $|X(\omega)| = 0$ вне диапазона $-2\pi f_m \leq \omega \leq 2\pi f_m$.

В реальных задачах спектр сигнала может лежать в любом диапазоне частот, начинаться и заканчиваться на любой частоте. В связи с чем определение Теоремы Котельникова правильно рассматривать не относительно верхней частоты непрерывного сигнала (его абсолютного значения), а относительно ширины спектра Δf такого сигнала, где доля энергии (мощности) сигнала составляет не менее 90% (рис.2)

$$f_d \geq 2 \cdot (f_v - f_n) \text{ или } f_d \geq 2 \cdot \Delta f. \quad (2)$$

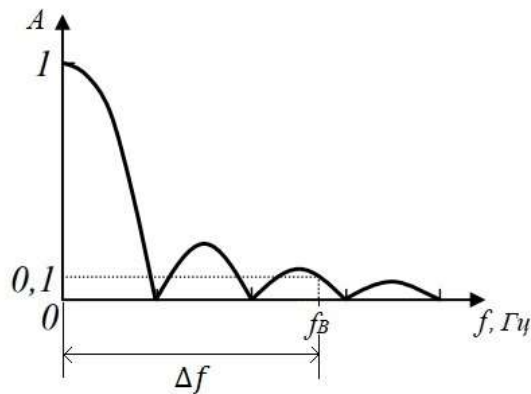


Рисунок 2 – Пример определения ширины спектра по уровню амплитуды:

$$0,1A_{\max}$$

Цифровой сигнал – это дискретный сигнал, к которому была применена операция квантования по уровню, то есть диапазон отсчетных значений дискретного сигнала разбивается на конечное число уровней d_0, d_1, \dots, d_k , затем происходит округление значения каждого отсчета до одного из двух ближайших к нему уровней (рис.3).

Связь между решетчатой функцией $x_d(nT_d)$ и квантованной решетчатой функцией $x_{ц}(nT_d)$ определяется нелинейной функцией – амплитудной характеристикой квантования $Q(x)$:

$$Q(x) = d_0 + \sum_{v=1}^K \Delta_v \mathbf{1}(x - a_v),$$

где $\Delta_v = d_v - d_{v-1}$ — шаг квантования (уровни); a_v — порог квантования; $\mathbf{1}(x)$ — единичная ступенчатая функция; $K + 1$ — число уровней квантования.

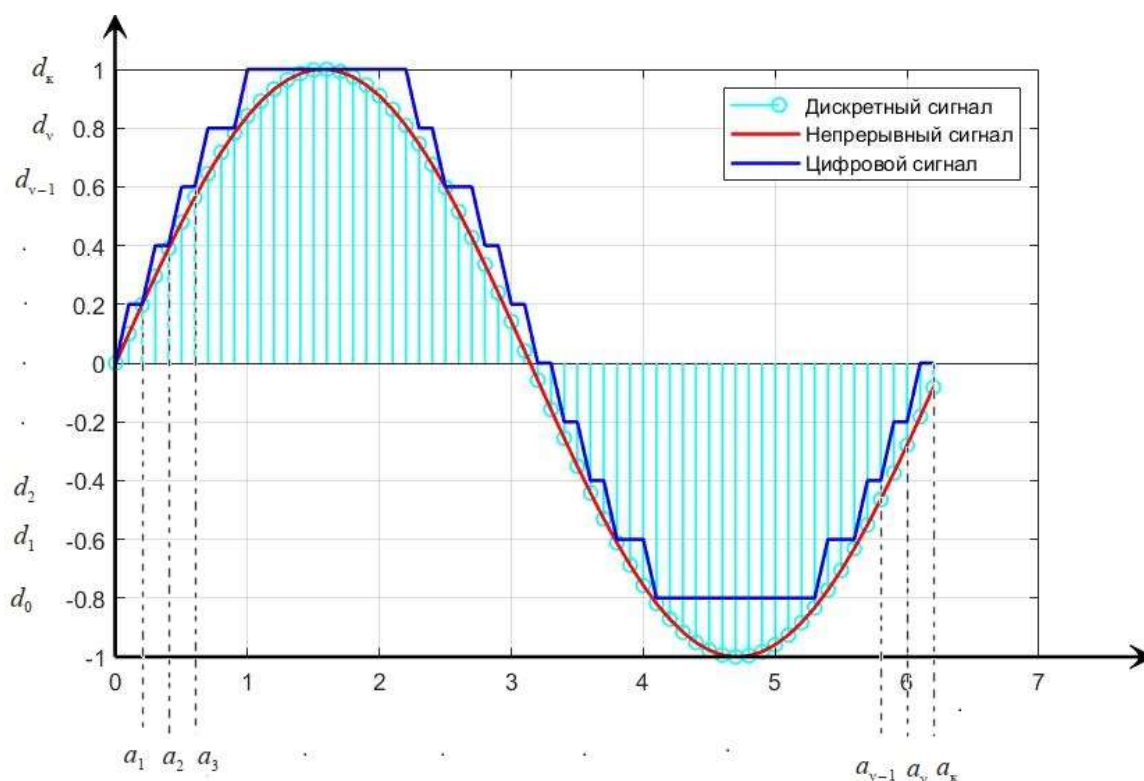


Рисунок 3 – Иллюстрация квантования дискретного сигнала с шагом квантования 0,2

При этом значение сигнала может округляться либо до ближайшего уровня, либо до меньшего или большего из ближайших уровней в зависимости от способа кодирования. В результате процесс квантования сводится к замене любого мгновенного значения дискретного сигнала одним из конечного множества уровней квантования. При этом возможны два типа искажений сигнала — за счет дискретизации и за счет конечного числа уровней квантования. Выбирая достаточно большое число разрядов, можно увеличить точность представления сигнала, но это приводит к усложнению и удорожанию обработки. Устройства, осуществляющие дискретизацию по времени и квантование по уровню, называются аналого-цифровыми преобразователями (АЦП). Устройства, переводящие цифровой сигнал в аналоговый называются цифро-аналоговыми преобразователями (ЦАП).

2. Классификация цифровых систем. Структура системы цифровой обработки сигналов

Цифровые системы можно классифицировать по различным признакам:

- по области применения – цифровые системы автоматического управления и цифровые системы преобразования и обработки информации, в свою очередь, цифровые системы преобразования и обработки информации (системы ЦОС) могут являться подсистемой цифровые системы автоматического управления;
- по применимости принципа суперпозиции – системы ЦОС можно разделить на линейные и нелинейные;
- по степени изменения параметров во времени – стационарные и нестационарные;
- по наличию обратных связей – без обратных связей, например КИХ-фильтры, и с обратными связями, например БИХ-фильтры,
- по принципам обработки информации – линейная фильтрация, оптимальная фильтрация, адаптивная фильтрация;
- по составу вычислительных устройств – программные устройства, т.е. работающие под управлением программы (микропроцессоры, микро-ЭВМ), устройства с программируемой структурой;
- по другим признакам (технологическим, конструктивным).

В цифровой обработке сигнала можно выделить три основных этапа:

1. Формирование цифрового сигнала $x_{\text{ц}}(nT_{\text{д}})$ из исходного аналогового сигнала $x(t)$;
2. Преобразование цифрового сигнала $x_{\text{ц}}(nT_{\text{д}})$ в цифровой сигнал $y_{\text{ц}}(nT_{\text{д}})$ по заданному алгоритму;
3. Формирование результирующего аналогового сигнала $y(t)$ из цифрового сигнала $y_{\text{ц}}(nT_{\text{д}})$.

В обобщенной схеме ЦОС этим этапам соответствуют три функциональных устройства: кодер, устройство ЦОС, декодер (рис.4).

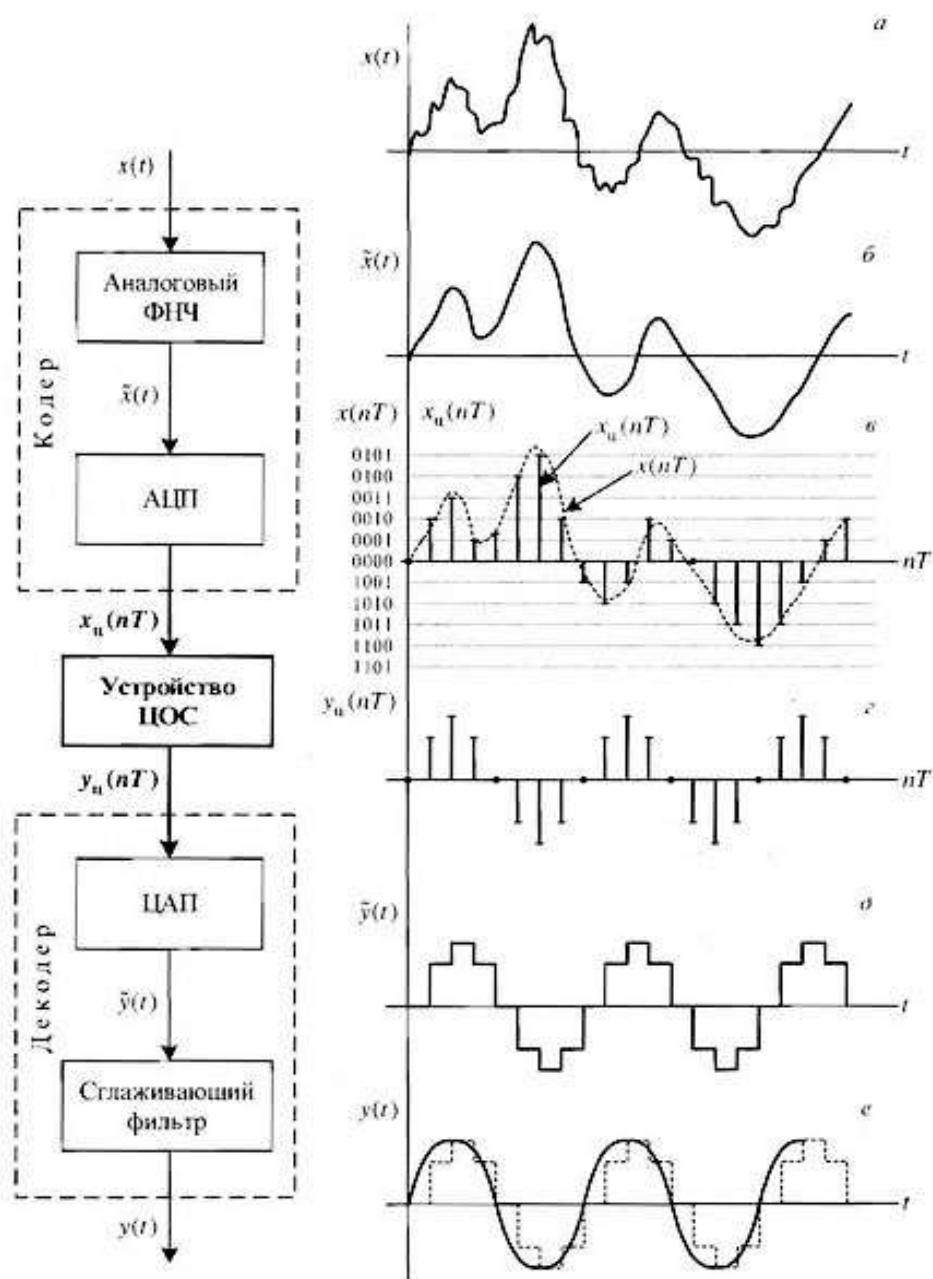


Рисунок 4 – Обобщенная схема и временные диаграммы поэтапного процесса ЦОС

На первом этапе кодер из исходного аналогового сигнала (рис. 4, а) формирует цифровой сигнал (рис. 4, в), без чего принципиально невозможна

цифровая обработка. В состав кодера входят аналоговый фильтр нижних частот (ФНЧ) для ограничения спектра исходного аналогового сигнала и АЦП. Необходимость ограничения спектра вытекает из теоремы Котельникова, в соответствии с которой частота дискретизации выбирается из условий (1) или (2).

Необходимость ограничения спектра связана с особенностями частотного распределения энергии сигнала: основная часть его энергии сосредоточена в области $f \leq f_B$ т.е. амплитуды спектральных составляющих, начиная с некоторой частоты существенно снижаются. Выбор значения определяется конкретным типом сигнала и решаемой задачей. При обработке аудио- и видеосигналов выбор f_B зависит от особенностей психофизического восприятия этих сигналов. Например, для стандартного телефонного сигнала верхняя частота равна 3,4 кГц, а минимальная стандартная частота дискретизации, соответственно, 8 кГц.

На выходе ФНЧ получают аналоговый сигнал с финитным (ограниченным по частоте) спектром (рис. 4, б). Аналого-цифровой преобразователь формирует цифровой сигнал посредством дискретизации и квантования сигнала (рис. 4, в). Уровни квантования традиционно кодируются двоичными числами разрядности b , зависящей от числа уровней квантования R :

$$R \leq 2^b. \quad (3)$$

На втором этапе устройство ЦОС преобразует цифровой сигнал (рис. 4, в) в цифровой сигнал (рис. 4, г) по некому заданному алгоритму. Устройство ЦОС может быть реализовано аппаратно или программно. В первом случае – в виде специализированного цифрового устройства, во втором – в виде программы на компьютере или цифровом процессоре обработки сигналов (ЦПОС). Программная реализация преобладает. Устройства ЦОС могут работать в реальном или нереальном времени. В реальном времени обработка

сигналов должна выполняться в темпе поступления отсчетов входного сигнала и отвечать следующим требованиям:

- время цикла $\Delta t_{\text{ц}}$ при вычислении отсчета $y_{\text{ц}}(nT_{\text{д}})$ не должно превышать интервала между двумя соседними отсчетами $x_{\text{ц}}(nT_{\text{д}})$ т.е. периода дискретизации T : $\Delta t_{\text{ц}} \leq T$;
- тактовая частота процессора должна быть много выше частоты дискретизации сигнала.

В реальном времени выполняется обработка сигналов, связанная с их передачей по каналам связи, в том числе, по сети Internet. К типовым задачам ЦОС в реальном времени относятся: обнаружение, фильтрация, сжатие, распознавание сигналов и др. В нереальном времени выполняется обработка сигналов, связанная, прежде всего, с их исследованием. К типовым задачам ЦОС в нереальном времени относятся: студийная обработка аудио- и видеосигналов: обработка данных различной физической природы, полученная от датчиков, и др.

На третьем этапе декодер формирует результирующий аналоговый сигнал $y(t)$ из цифрового сигнала $y_{\text{ц}}(nT_{\text{д}})$. В состав декодера входят ЦАП и сглаживающий фильтр. Цифро-аналоговый преобразователь формирует из цифрового сигнала $y_{\text{ц}}(nT_{\text{д}})$ (рис. 4, г) ступенчатый аналоговый сигнал (рис 4, д). Сглаживающий фильтр (низкочастотный) устраняет ступенчатый эффект (скачки) в выходном сигнале ЦАП, и на выходе сглаживающего фильтра получаем аналоговый сигнал (рис. 4, е) $y(t)$ – результат преобразования исходного сигнала.

3. Математическое описание дискретных сигналов. Теорема

Уиттекера – Котельникова – Шеннона–Найквиста.

Дискретные сигналы, как и аналоговые, полностью определяются математическими функциями и операторами, устанавливающими связь между ее выходным $y(n)$ и входным $x(n)$ сигналами или последовательностями:

$$y(n) = \Phi[x(n)],$$

где $\Phi[x(n)]$ – оператор, представляющий собой алгоритм обработки системы сигнала. Именно оператор $\Phi[x(n)]$ указывает на класс дискретной системы: линейный, нелинейный, инвариантный и т.д. Этот же оператор определит форму и значения сигнала в паузах. Рассмотрим следующие примеры математического описания стандартных дискретных последовательностей и их преобразований в зависимости от класса дискретных систем. При анализе дискретных сигналов и в системах обработки сигналов простейшими преобразованиями над последовательностями $x(n)$ и $y(n)$ считаются:

- а) сумма двух последовательностей: $v(n)=x(n)+y(n)$;
- б) произведение последовательностей: $z(n)=x(n) \cdot y(n)$;
- с) произведение последовательности на число α : $z(n)=x(n) \cdot \alpha$;
- д) задержка последовательности или ее сдвиг: $y(n)=x(n-n_0)$.

Особо важными последовательностями считаются:

а) *Единичный импульс*

$$\delta(n) = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

В теории дискретных сигналов единичный импульс играет ту же роль, что и дельта-функция Дирака (рис. 5). Это последовательность с единственным ненулевым отсчетом, и подобные последовательности принято называть *дискретным импульсом*. Из этого положения следует, что любая последовательность может быть выражена в виде комбинации

сдвинутых единичных импульсов, то есть последовательность $x(n)$ представляется в следующем виде:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k). \quad (4)$$

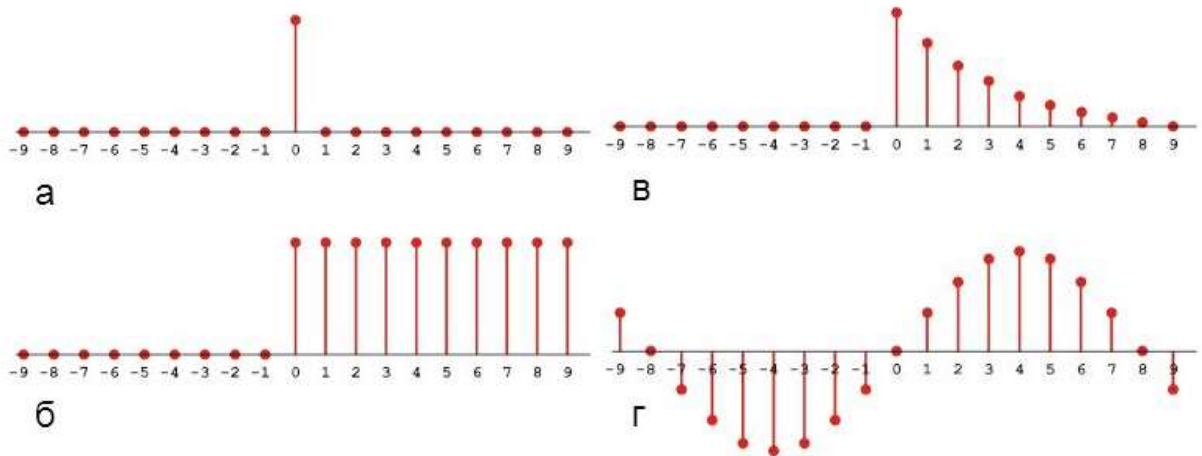


Рисунок 5 – Виды стандартных последовательностей: а) единичный импульс, б) единичный скачок, в) вещественная экспонента, г) периодический сигнал

б) Единичный скачок

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Единичный скачок также называют функцией включения. Реакция объекта на единичный скачок — это переходная функция, она описывает переход от одного состояния в другое при единичном ступенчатом воздействии. Единичный скачок может быть выражен из единичного импульса следующим образом:

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k).$$

в) Экспоненциальная последовательность

$$z(n) = A\alpha^n$$

Если A и α – вещественные число, то соответствующая последовательность тоже называется вещественной. Если $0 < \alpha < 1$ и A положительно, то значения последовательности положительны и убывают при росте n (рис.5). Когда $-1 < \alpha < 0$, знаки членов последовательности чередуются, но их абсолютные значения все равно убывают.

г) Синусоидальная последовательность

$$x(n) = A \cos(\omega_0 n + \varphi), \forall n \in \mathbb{Z}$$

Синусоидальная последовательность следует из экспоненциальной при α , имеющей вещественную и мнимую части. То есть, если $\alpha = |\alpha|e^{i\omega_0}$ и $A = |A|e^{i\varphi}$, то последовательность $A\alpha^n$ может быть записана следующим образом

$$\begin{aligned} x(n) = A\alpha^n &= |A|e^{i\varphi}|\alpha|e^{i\omega_0 n} = |A||\alpha|^n e^{i\omega_0 n + \varphi} \\ &= |A||\alpha|^n A \cos(\omega_0 n + \varphi) + |A||\alpha|^n \sin(\omega_0 n + \varphi) \end{aligned}$$

Эта последовательность осциллирует с экспоненциально растущей огибающей, если $|\alpha| > 1$, или с экспоненциально уменьшающейся огибающей при $|\alpha| < 1$. Важным замечанием при работе с синусоидальными сигналами является то, что увеличение частоты дискретной синусоиды не обязательно влечет за собой уменьшение ее периода. Для наглядного пояснения данного замечания рассмотрим пример. Пусть есть последовательности

$$x_1(n) = \cos(3\pi n/8) \text{ и } x_2(n) = \cos(2\pi n/8).$$

Частота $x_1(n)$ больше, чем у последовательности $x_2(n)$. При этом период $x_2(n)$ равен $N=8$, так как $x_2(n+8) = \cos(2\pi(n+8)/8) = \cos(2\pi n/8 + 2\pi) = \cos(2\pi n/8) = x_2(n)$. А период $x_1(n)$ $N=16$, так как

$$x_1(n+8) = \cos(3\pi(n+8)/8) = \cos(3\pi n/8 + 3\pi) = -x_1(n) \neq x_1(n),$$

$$x_1(n+16) = \cos(3\pi(n+16)/8) = \cos(3\pi n/8 + 6\pi) = x_1(n).$$

Из этого следует, что увеличение частоты от $f_{д2} = 2\pi n/8$ до $f_{д1} = 3\pi n/8$ ведет к увеличению периода сигнала. Отметим, что здесь идет речь про период дискретизации, а не период интуитивно понятный нам в аналоговых сигналах. Это происходит из-за того, что дискретный сигнал определен лишь для целых значений n .

4. Спектр дискретного сигнала

Значительная часть анализа временных рядов связана с преобразованием Фурье или разложением сигнала, то есть временной функции в ряд по базисным функциям. Такое разложением позволяет свести анализ сложного сигнала к анализу его более простых составляющих, например, частотных характеристик. В этом случае преобразование Фурье играет роль необходимого промежуточного шага в определении плотностей спектра, мощности, кросс-спектральных плотностей, передаточных функций (ПФ), сверток и корреляционных функций. И в связи с тем, что массивы обрабатываемых данных для спектрального анализа являются зачастую большими и требуют времени для преобразования, актуальной задачей является также эффективное вычисление преобразования Фурье.

Интегральное представление сигналов

Из известных интегральных преобразований при анализе сигналов наиболее часто используется преобразование Фурье:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt$$

Ему соответствуют обратное преобразование:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

Интеграл Фурье дает описание сигнала в виде суперпозиции гармонических составляющих с непрерывной последовательностью частот. Спектральный анализ сигналов с использованием такого представления называется гармоническим. Функция $S(w)$ называется спектральной плотностью или спектром сигнала $S(t)$. Интегральное преобразование Фурье возможно для функций, описывающих сигналы с конечной энергией.

Функция, описывающая сигнал $s(t)$, может быть представлена в виде взвешенной суммы более простых (базисных) функций $\varphi(t)$:

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \varphi_n(t)$$

где C_n – коэффициенты разложения. Такое представление сигналов означает, что он рассматривается как совокупность колебаний, взятых с соответствующими коэффициентами. Разложение сигнала $s(t)$ в таком виде по ортогональной системе функций называется обобщенным рядом Фурье. Совокупность коэффициентов разложения называется *спектром сигнала* в выбранной системе базисных функций или обобщенным спектром (рис. 6).

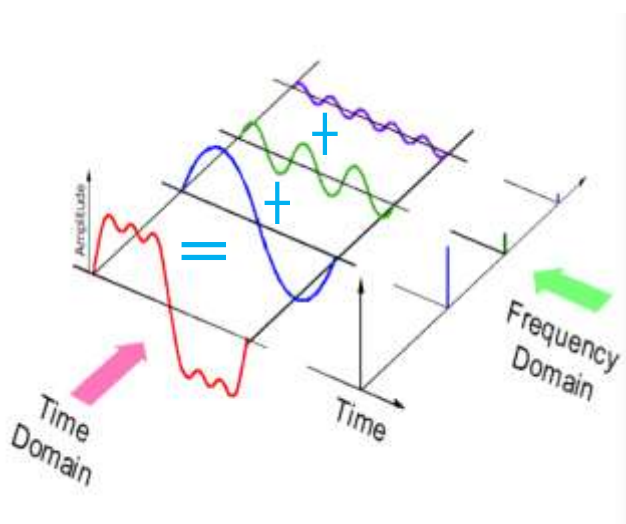


Рисунок 6 – Пример разложения сложносоставного сигнала на несколько простых и их отображение в спектральной характеристике

В практике анализа периодических функций наибольшее применение получил тригонометрический ряд Фурье, в котором в качестве базиса выбраны тригонометрические функции:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t)$$

Коэффициенты разложения в ряд Фурье определяются выражениями:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(k\omega t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(k\omega t) dt$$

где $T=2\pi/\omega_1$ – период сигнала. Тригонометрический ряд Фурье дает разложение сигнала по гармоническим составляющим, позволяет проводить анализ сигнала в частотной области. Анализ с его использованием, как и с использованием интегрального преобразования Фурье, называется гармоническим.

Дискретное преобразование Фурье или преобразование на конечном интервале дискретных значений времени вычисляется, как правило, при помощи быстрого преобразования Фурье. Определение преобразования для комплексного сигнала $X_j=X(t_j)$, заданного для дискретных равностоящих отсчетов времени t_0, t_1, \dots, t_{N-1} имеет вид:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) \cdot e^{(-2\pi j \cdot nk/N)}, \text{ где } k=0,1,\dots,N-1.$$

Данное преобразование обратимо и позволяет по известному дискретному спектру однозначно восстановить сам дискретный сигнал:

$$x(nT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{(2\pi j \cdot nk/N)}$$

Амплитудный спектр – это дискретная функция $A_{mn} = f(n\omega_1)$, $n = 0; 1; 2; \dots$, отражающая зависимость амплитуд гармоник от частоты. Фазовый спектр – аналогичная функция, показывающая, как зависят от частоты начальные фазы гармоник сигнала (рис. 7).

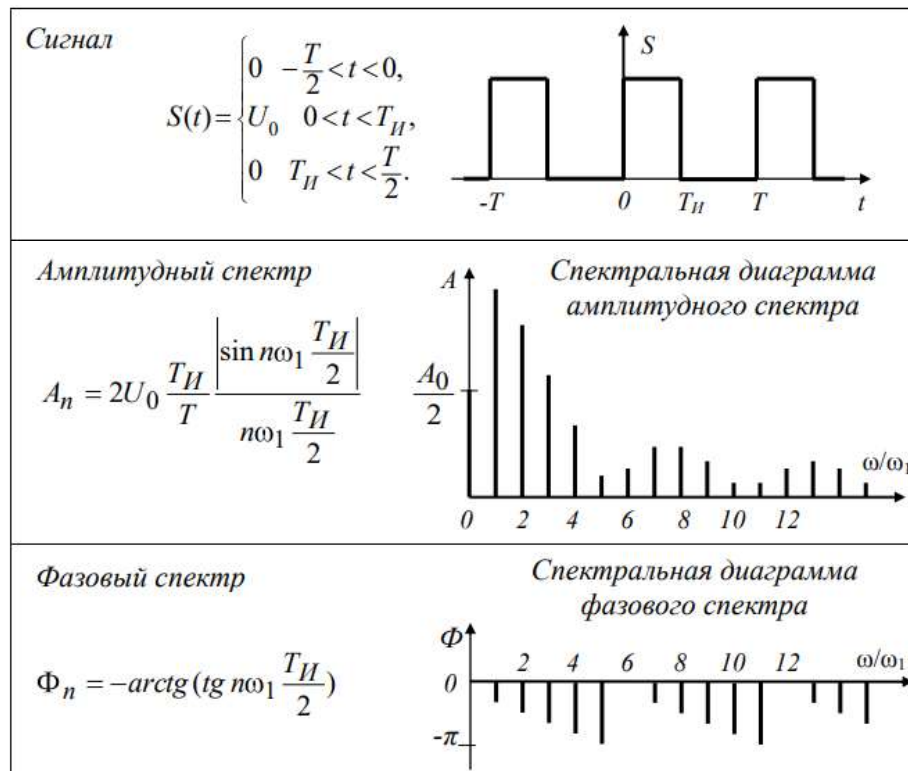


Рисунок 7 – Пример разложения прямоугольного сигнала в амплитудный и фазовый спектр

Чтобы получить «правильный» спектр сигнала, являющегося суммой нескольких синусоид с разными периодами, необходимо чтобы на периоде измерения сигнала укладывалось целое число периодов каждой синусоиды.

На практике это условие можно выполнить при достаточно большой длительности измерения сигнала.

При дискретизации аналогового сигнала с финитным спектром, ограниченным максимальной частотой ω_m , отвечающей условию теоремы Котельникова. Спектр дискретного сигнала $S_d(j\omega)$ в основной полосе частот $\pm\omega_d/2$ (при $\omega \leq \omega_d/2$) точно совпадает (до постоянного множителя T_d) со спектром аналогового сигнала: $T_d X_d(j\omega) = X_a(j\omega)$. Если сигнал с финитным спектром дискретизируется с частотой $\omega_d < 2\omega_m$, спектр дискретного сигнала в основной полосе частот $\omega \leq \omega_d/2$ отличается от спектра аналогового сигнала. Периодизация спектра $S(j\omega)$ при дискретизации приводит в данном случае к перекрытию и суммированию его с соседними смещенными по частоте спектрами. Это явление называют наложением спектров при дискретизации или алиасингом (рис. 8). Связанные с ним погрешности дискретизации также называют погрешностями, или искажениями наложения. При наложении невозможно точное восстановление аналогового сигнала по его дискретным выборкам.

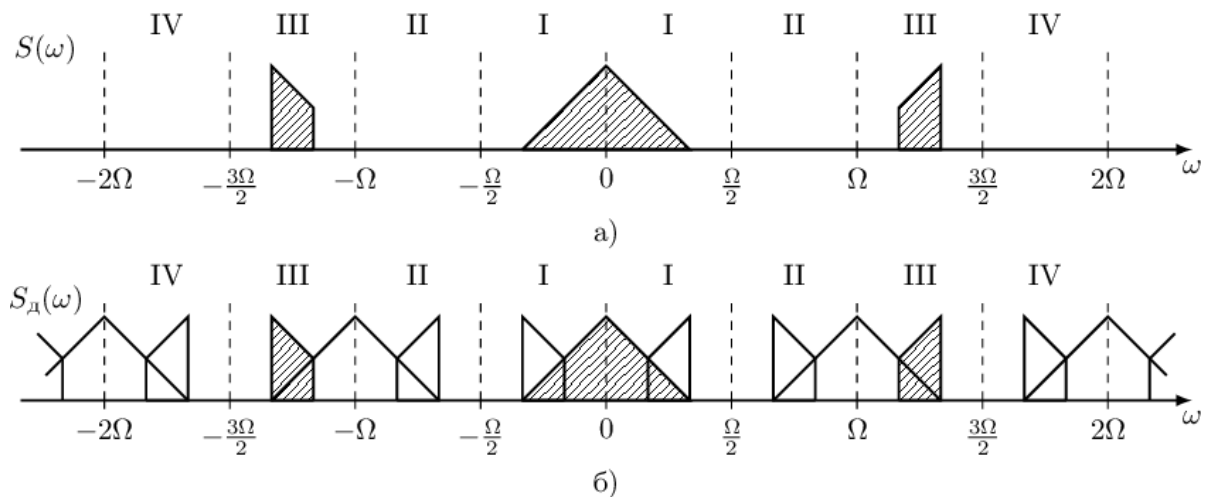


Рисунок 8 – Эффект наложения спектра сигнала

Согласно рис. 8 при дискретизации сигналов с частотой, не отвечающей теореме отсчетов Котельникова, происходит сворачивание полос спектра аналогового сигнала, выходящих за основную полосу частот

дискретного сигнала $\pm\omega_d/2$, внутри этой полосы путем однократного или многократного их зеркального отражения от ее границ, т.е. вертикальных линий, соответствующих граничным частотам $\pm\omega_d/2$.

5. Двумерное преобразование Фурье

Цифровая обработка применяется не только для анализа одномерных массивов данных. Алгоритм преобразования Фурье может быть применен для обработки n -мерного массива данных с помощью последовательного вычисления преобразования Фурье, сводящегося к преобразованию меньшей размерности (одномерной) по каждой последовательности данных многомерного массива. То есть для массива размерностью $n \times m$ будет реализовано n преобразований Фурье по строкам, а потом полученный результат будет преобразован по m столбцам.

Наиболее распространенным примером n -мерного преобразования Фурье является обработка изображений и соответствующее ей двумерное преобразования Фурье или пространственное Фурье преобразование: Фурье-спектр пространственных частот изображения является его частотным представлением в ортонормальном базисе, состоящем из комплексных экспонент. Представление изображения в таком пространстве дает возможность наблюдать его структурные особенности, связанные с периодичностью повторения элементов, наличием мелких деталей, качеством изображения и др. Пространственные частоты имеют размерность, обратную единицам измерения расстояний на изображении. Тогда, представление изображения в базисе комплексных экспоненциальных функций задается парой преобразований Фурье:

$$F(\omega_x, \omega_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} a(x, y) e^{-i2\pi(\omega_x x + \omega_y y)} dx dy \quad (1)$$

$$a(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(\omega_x, \omega_y) e^{i2\pi(\omega_x x + \omega_y y)} dx dy \quad (2)$$

где (1) прямое преобразование Фурье, (2) обратное преобразование, x, y – координаты в плоскости изображения, ω_x, ω_y – пространственные частоты.

Как и в одномерном случае, понятие о бесконечно непрерывных сигналах может быть распространено и для случаев сигналов с ограниченной протяженностью, как, например, изображение. Для этого рассмотрим изображение шириной N и высотой M (рис.9).

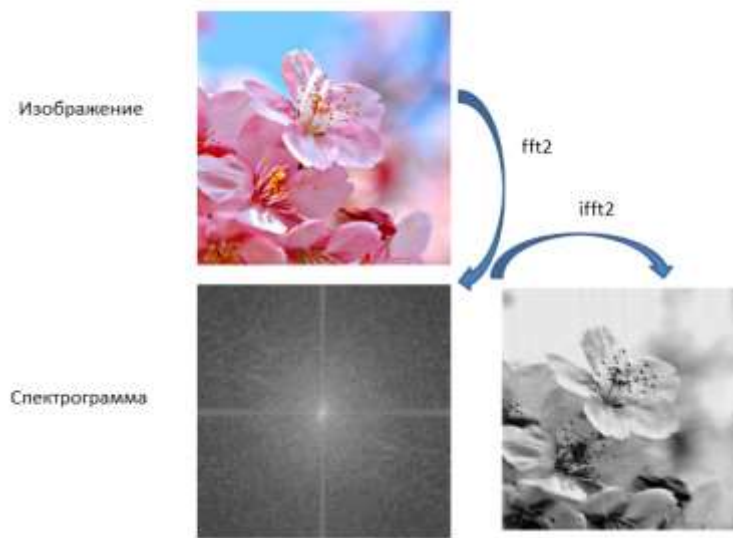


Рисунок 9 – Двумерное преобразование Фурье изображение и восстановление его из спектра

Преобразование Фурье такого изображения имеет вид:

$$F(\omega_x, \omega_y) = \int_{-M/2}^{M/2} \int_{-N/2}^{N/2} a(x, y) e^{-i2\pi(\omega_x x + \omega_y y)} dx dy. \quad (3)$$

Преобразование Фурье ограниченного в пространстве сигнала ($a(x, y) = 0$ при $|x| > N/2$ и $|y| > M/2$), если его представить периодически размноженным по всей плоскости, является дискретным, т.е. содержит лишь счетное количество гармоник на частотах $[\omega_x / N, \omega_y / N]$, $-\infty < \omega_x, \omega_y < \infty$. Спектр неограниченного в пространстве дискретного изображения является периодической функцией. Если расстояния между точками, в которых заданы отсчеты изображения по осям Ox и Oy равны соответственно Δx и Δy , то периоды преобразования Фурье равны $1/\Delta x$ и $1/\Delta y$. Если начало

отсчета поместить в центральной точке матрицы периодически повторяющегося фурье-образа, то максимальные пространственные частоты будут равны $\pm 1/2 \Delta x$ и $\pm 1/2 \Delta y$.

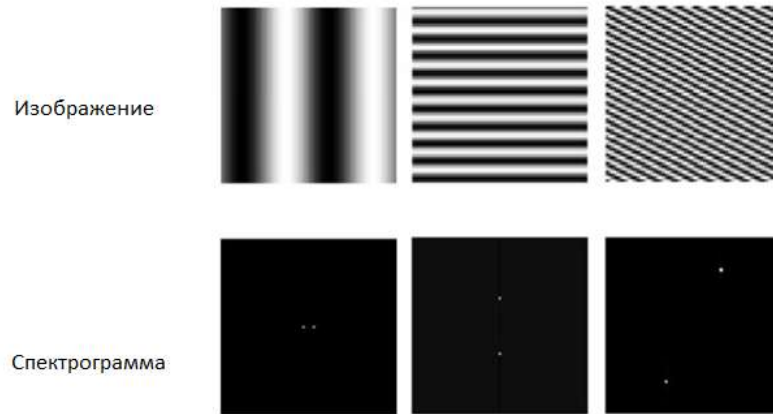


Рисунок 10 – Пример изображения и его спектрограмма

Максимальная частота, которая может быть получена при заданном шаге дискретизации сигнала, называется частотой Найквиста. В полученном периодическом преобразовании Фурье дублирующиеся спектральные составляющие можно отбросить и считать, что дискретный сигнал имеет ограниченный по частоте спектр. Таким образом, просуммировав приведенные рассуждения, можно сделать вывод, что Преобразование Фурье ограниченного в пространстве дискретного изображения является также дискретным и ограниченным по частоте. Максимальные пространственные частоты определяются шагом дискретизации изображения.

Ограниченность спектра дискретного изображения по частоте можно продемонстрировать, рассмотрев простой пример. Самый маленький период повторения на изображении мы можем получить, если будем чередовать белые и черные точки, например, вдоль оси ОХ. Этот период будет равен $2\Delta x$, а соответствующая пространственная частота равна $1/2\Delta x$. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) изображения, заданного в точках $f(k, l), k = 0 \dots M - 1, l = 0, \dots, N - 1$ определяется по формуле:

$$F_{m,n} = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} f_{k,l} e^{-i2\pi(\frac{km}{M} + \frac{ln}{N})} \quad (4)$$

Сегодня трудно представить область деятельности, в которой можно обойтись без компьютерной обработки изображений. Интернет, сотовый телефон, видеокамера, фотоаппарат, сканер, принтер, так прочно вошедшие в наш быт, – немыслимы без компьютерной обработки изображений. При компьютерной обработке изображений решается широкий круг задач, таких как

- улучшение качества изображений;
- измерение параметров;
- спектральный анализ многомерных сигналов;
- распознавание изображений;
- сжатие изображений.

Любое изображение представляется двумерным массивом, в котором каждый элемент является функцией трех переменных трехзначных чисел, которые представляют собой значения для каждого цветового канала RGB. Значение цветового канала также характеризуется таким понятием как интенсивность цвета. В данном случае под интенсивностью понимается «количество белого света» в пикселе. Если источника света нет, то получается абсолютно черный RGB (0, 0, 0) цвет, если же происходит постепенное добавление «света» в каждый канал RGB до максимума, то получаем белый цвет RGB (255, 255, 255). То есть интенсивность цвета пикселя определяет количество «света» в каждом канале, тогда каждый канал может иметь градацию цвета, от черного до максимально светлого, между которыми находятся полутона серого цвета (рис.11).

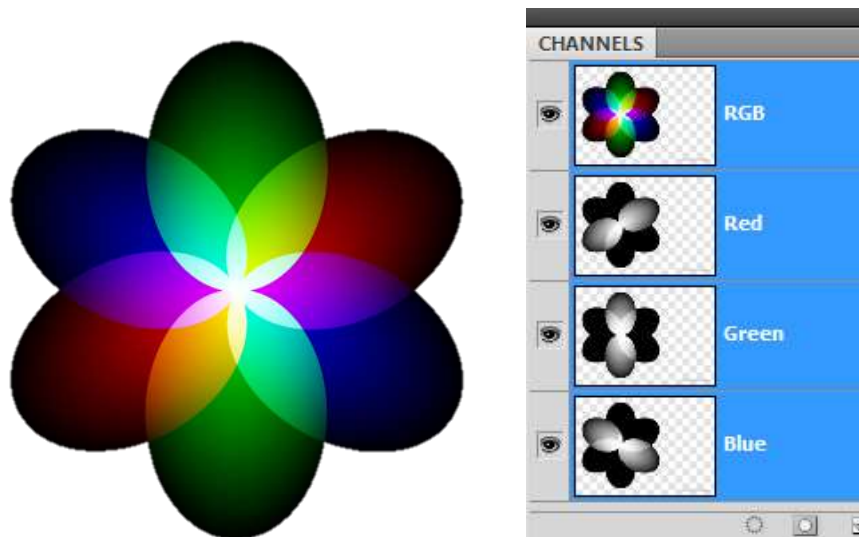


Рисунок 11 – Представление диаграммы всех оттенков цветов и их интенсивность в полутоновом представлении.

На основе понятия интенсивности цвета происходит основная часть операций цифровой обработки изображений.

6. Z-преобразование и его свойства

Z-преобразование дискретных сигналов широко используют при анализе и синтезе дискретно-аналоговых и цифровых устройств обработки сигналов. По отношению к дискретным сигналам оно играет ту же роль, какую играют интегральные преобразования Фурье и Лапласа по отношению к аналоговым сигналам.

Пусть есть аналоговый сигнал $x(t)$ при переходе к его изображению по Лапласу необходимо воспользоваться следующим выражением

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt < \infty$$

Пусть теперь $x(t)$ дискретизируется с шагом Δt $x(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n - k)$. Тогда Преобразование Лапласа для дискретного сигнала примет вид

$$X_d(p) = \Delta t \sum_{k=0}^{\infty} x(k\Delta t) e^{-pk\Delta t}$$

А Z–преобразование последовательности чисел $\{x(k)\}$ происходит на основе перехода к новой переменной $z=\exp(s*\Delta t)$, и исходный сигнал принимает вид:

$$X(z) = \Delta t \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}$$

Другими словами дискретное преобразование Лапласа на комплексной плоскости периодически по мнимой оси, так как $X(z)$ является комплексной функцией непрерывного комплексного аргумента, который является периодической функцией (рис. 12).

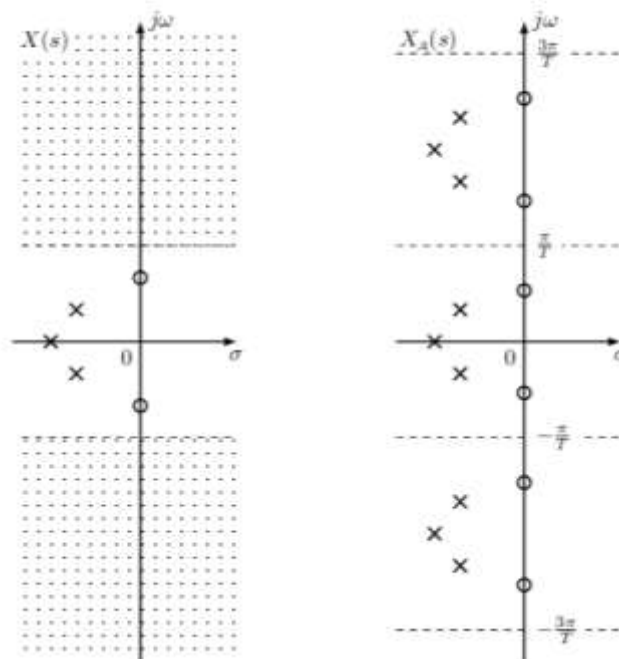


Рисунок 12 – Графическое представление связи z-преобразования и преобразования Лапласа

Переход от переменной p к переменной z соответствует отображению плоскости p на плоскость z , в результате которого линии, параллельные оси $j\omega$, отображаются в концентрические окружности с центром в начале координат. Сама ось $j\omega$ отображается в единичную окружность, причем,

когда ω меняется от $-\pi/\Delta t$ до $\pi/\Delta t$, отображающая точка совершает один оборот на единичной окружности (рис. 13).

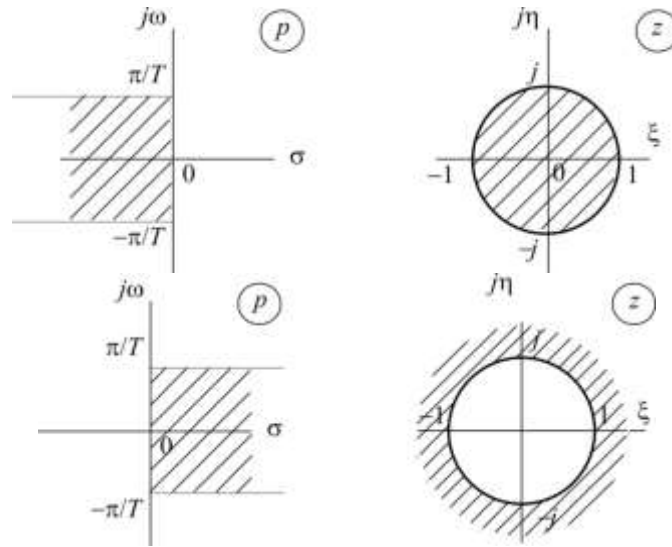


Рисунок 12 – Расположение комплексно-сопряжённых полюсов изображений вещественных сигналов $x(t)$ и $x[n]$ в Р-плоскости и в — Z-плоскости

Свойства z-преобразования:

1) Линейность.

Z-преобразование, согласно определению, является линейной комбинацией отсчетов последовательности, поэтому оно подчиняется принципу суперпозиции:

$$x_1(k) \xleftrightarrow{Z} X_1(z) \text{ и } x_2(k) \xleftrightarrow{Z} X_2(z)$$

2) Запаздывание.

Если z-преобразование последовательности $\{x(k)\}$ равно $X(z)$, то z-преобразование последовательности, задержанной на m тактов ($y(k)=x(k-m)$), будет иметь вид

$$x(k) \xleftrightarrow{Z} X(z), \text{ то } x(k-m) \xleftrightarrow{Z} z^{-m} X(z)$$

Z^{-m} является оператором задержки дискретной последовательности на m тактов.

3) Свертка.

Операция умножения двух Z-изображений соответствует операции свёртки их оригиналов (решётчатых функций).

$$x(k) \xleftrightarrow{Z} X(z) \text{ и } h(k) \xleftrightarrow{Z} H(z), \text{ то } Y(z) = X(z)H(z).$$

4) Операционные отображения математических операций с сигналом на z-преобразование и основные примеры z-преобразований

Умножение	$kx(k) \xleftrightarrow{Z} -z \frac{dX(z)}{dz}$
Умножение на экспоненту	$x(k)e^{\pm ak\Delta t} \xleftrightarrow{Z} X[z e^{\pm a\Delta t}]$
Возведение в степень	$x(k) = a^k \rightarrow X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$
$x(k) = \mathbf{1}(k) = \begin{cases} 1, & k=0, \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$	$X(z) = 1$
$x(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0, \\ 0, & k < 0, \end{cases}$	$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$

5) Опережающий сдвиг $x(k+1) \xleftrightarrow{Z} z[X(z) - x(0)]$

Пример Z-преобразования для последовательности $x(nT) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$$X(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 5z^{-4}$$

Пример Z-преобразования для последовательности в виде единичного скачка $\sigma(nT)$:

$$X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots = 1/(1-z^{-1}).$$

7. Применения Z-преобразования

Одной из задач теории автоматического регулирования и управления является задача изучения реакции динамической системы на входной сигнал, то есть нахождение выходного сигнала.

В зависимости от формы, в которой описывается математическая модель динамической системы, выделяют динамические системы:

- непрерывные, которые описываются дифференциальными уравнениями;
- дискретные – описываются разностными уравнениями;
- линейные и нелинейные – описываются линейными и нелинейными уравнениями;
- стационарные и нестационарные – описываются уравнениями с постоянными или переменными коэффициентами;
- одномерные и многомерные – у многомерных суммарное число входов и выходов больше двух.

Применение преобразования Лапласа для решения таких задач подробно изучается в теории автоматического управления, рассмотрим применение Z-преобразования для решения задач анализа линейных дискретных одномерных стационарных динамических систем. Пусть задана одномерная линейная дискретная стационарная динамическая система, поведение которой описывается в общем случае разностным уравнением вида

$$\begin{aligned} a_k x(n+k) + a_{k-1} x(n+k-1) + \dots + a_0 x(n) = \\ = b_m g(n+m) + b_{m-1} g(n+m-1) + \dots + b_0 g(n); \end{aligned} \quad (6)$$

где $g(n)$, $n=0, 1, 2, \dots$ – входной сигнал, a_0, a_1, \dots, a_k ; b_0, b_1, \dots, b_m – числа, заданные коэффициенты, $k \geq m$, начальные условия $x(0)=x_0$, $x(1)=x_1, \dots$, $x(k-1)=x_{k-1}$. Требуется найти выходной сигнал $x(n)$ при условии, что $x(n)$ и $g(n)$ являются оригиналами. Применим Z-преобразование к обеим частям уравнения (6)

$$\begin{aligned} (a_k z^k + \dots + a_0) X(z) - x_0(a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_1 z) - x_1(a_k z^{k-1} + \dots + a_2 z) - \dots - \\ - x_{k-1} a_k z = (b_m z^m + \dots + b_0) G(z) - g(0)(b_m z^m + \dots + b_1 z) - \dots - g(m-1) b_m z. \end{aligned} \quad (7)$$

Обозначим каждый из полиномов соответственно $D(z)$, $M(z)$, $D_H(z)$, $D_g(z)$, тогда выражение (7) примет вид $D(z)X(z) = M(z)G(z) + D_H(z) - D_g(z)$.

Из последнего уравнения находим Z-преобразование выходного сигнала:

$$X(z) = \frac{D_H(z)}{D(z)} + W(z) G(z) - \frac{D_g(z)}{D(z)} \quad (8)$$

где $W(z) = M(z)/D(z)$ – передаточная функция системы. Выходной сигнал $x(n)$ определяется из уравнения (8) с помощью обратного Z-преобразования, либо моделируется с помощью специализированных программных пакетов.

8. Фильтры в дискретных системах

Под дискретным фильтром (ДФ) в общем случае понимают систему, преобразующую одну дискретную последовательность в другую. Соответственно, цифровой фильтр (ЦФ) есть система, преобразующая один цифровой сигнал в другой. Цифровой фильтр реализуется как программа или аппаратным способом в виде цифровой схемы, содержащей регистры, сумматоры, умножители и другие вспомогательные элементы.

ЦФ называется **линейным**, если выходная последовательность $y(n)$ при нулевых начальных условиях при входном воздействии вида

$$x(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \text{ описывается как } y(n) = a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n).$$

Линейный ЦФ называется **стационарным** или **инвариантным во времени (ЛИВ)**, если откликом на воздействие

$$x(n) = x_1(n - n_0) \text{ будет } y(n) = y_1(n - n_0).$$

Связь между входной $x(n)$ и выходной $y(n)$ последовательностями в стационарном ЦФ описывается линейным разностным уравнением с постоянными коэффициентами вида

$$\sum_{m=0}^M a_m y(n-m) = \sum_{i=0}^N b_i x(n-i). \quad (9)$$

Откуда, нормируя относительно a_0 , получаем алгоритм работы цифрового фильтра во временной области **рекурсивного типа**:

$$y(n) = \sum_{i=0}^N b_i x(n-i) - \sum_{m=1}^M a_m y(n-m), \quad n \geq 0. \quad (10)$$

В частном случае, когда текущий отсчет выходной последовательности определяется только отсчетами входного сигнала (когда все $a_m = 0$), алгоритм работы цифрового фильтра принимает вид не **рекурсивного фильтра**:

$$y(n) = \sum_{i=0}^N b_i x(n-i). \quad (11)$$

Рекурсивный фильтр имеет бесконечную импульсную характеристику, а не рекурсивный фильтр — конечную, поэтому их еще принято называть БИХ и КИХ фильтры соответственно. В общем случае дискретный фильтр суммирует (с весовыми коэффициентами) некоторое количество входных отсчетов (включая последний) и некоторое количество предыдущих выходных отсчетов (11). Структура разностного уравнения (11) похожа на структуру дифференциального уравнения аналоговой линейной системы, только вместо операции дифференцирования в формуле фигурируют задержки дискретных последовательностей. Этим определяется и общность подходов к описанию аналоговых и дискретных систем. Требования к фильтрам могут задаваться как во временной, так и в частотной областях, что определяется назначением фильтра и удобством его описания. Так, согласованные фильтры чаще задаются импульсной характеристикой, а избирательные фильтры — частотными характеристиками. В частотной области требования предъявляются к АФЧХ, либо к ее составляющим — АЧХ и ФЧХ (рис. 13).

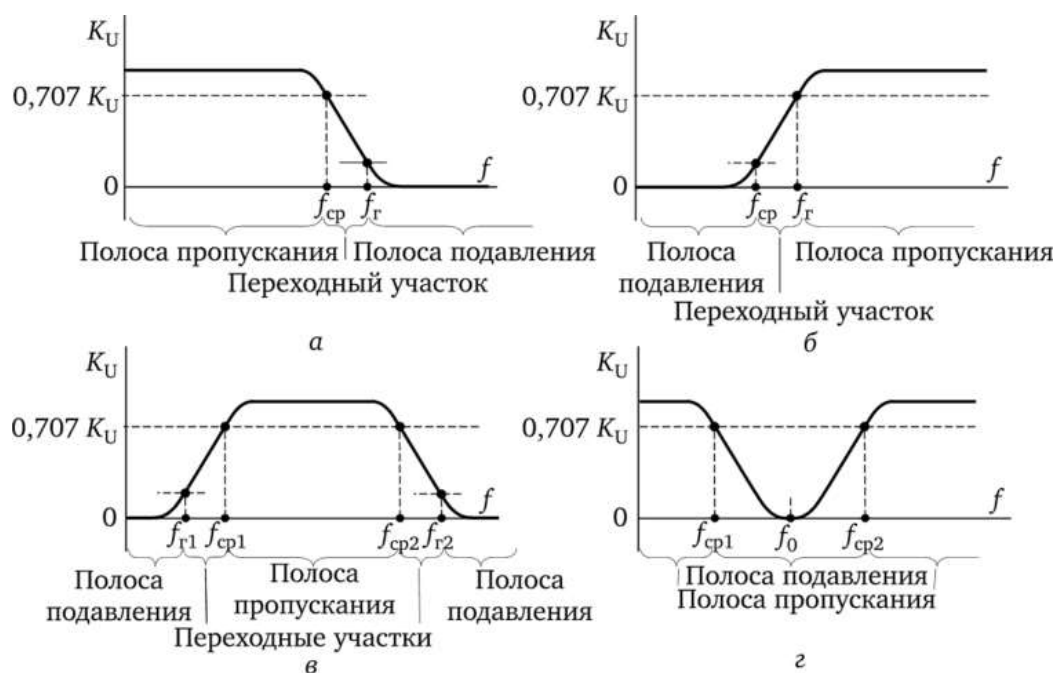


Рисунок 13 – Примеры АЧХ типовых фильтров: а) фильтр низких частот – ФНЧ; б) фильтр высоких частот – ФВЧ; в) полосовой фильтр; г) режекторный фильтр

В зависимости от взаимного расположения полос подавления и пропускания различают следующие типы фильтров:

1. Фильтр нижних частот (ФНЧ) — фильтр с полосой пропускания от 0 до частоты ω_c и полосой подавления от ω_z до бесконечности ($\omega_c < \omega_z$).
2. Фильтр верхних частот (ФВЧ) — фильтр с полосой пропускания от частоты ω_c до бесконечности и полосой подавления от 0 до ω_z ($\omega_c > \omega_z$).
3. Полосовой фильтр (ПФ) — обе границы полосы пропускания представляют собой ненулевые частоты $\omega_{сн}$, $\omega_{св}$, а с каждой из сторон от полосы пропускания имеется по одной полосе подавления (от 0 до $\omega_{зн}$ и от $\omega_{зв}$ до ∞).
4. Режекторный (заграждающий) фильтр (РФ) — фильтр с двумя полосами пропускания (от 0 до $\omega_{сн}$ и от $\omega_{св}$ до ∞) и одной полосой подавления.

5. Гребенчатый фильтр (ГФ) — фильтр с несколькими полосами подавления и несколькими полосам пропускания (рис. 14).

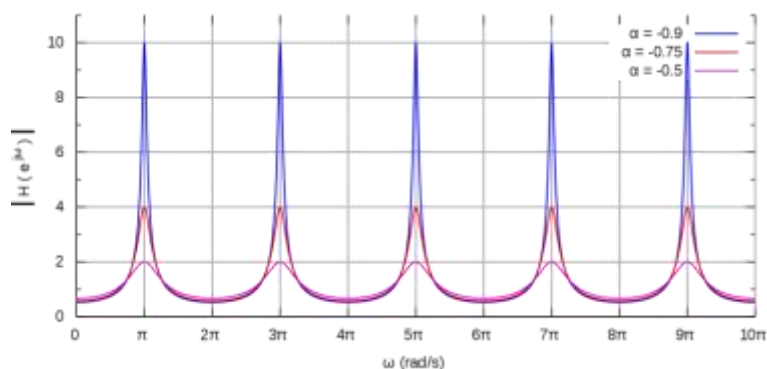


Рисунок 13 – Пример АЧХ гребенчатого фильтра

Итоговая классификация фильтров представлена на рисунке 14

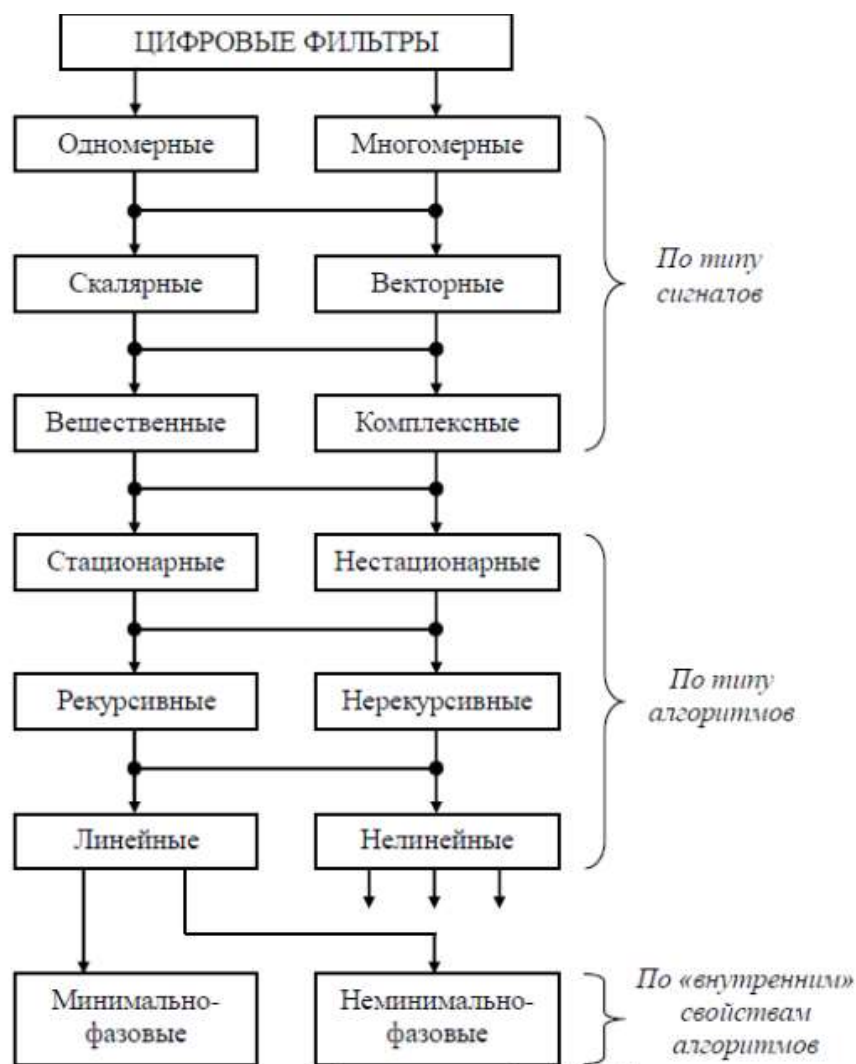


Рисунок 14 – Классификация фильтров

Структурные схемы построения БИХ– и КИХ–фильтров в соответствии с их разностными уравнениями представлена на рисунке 15

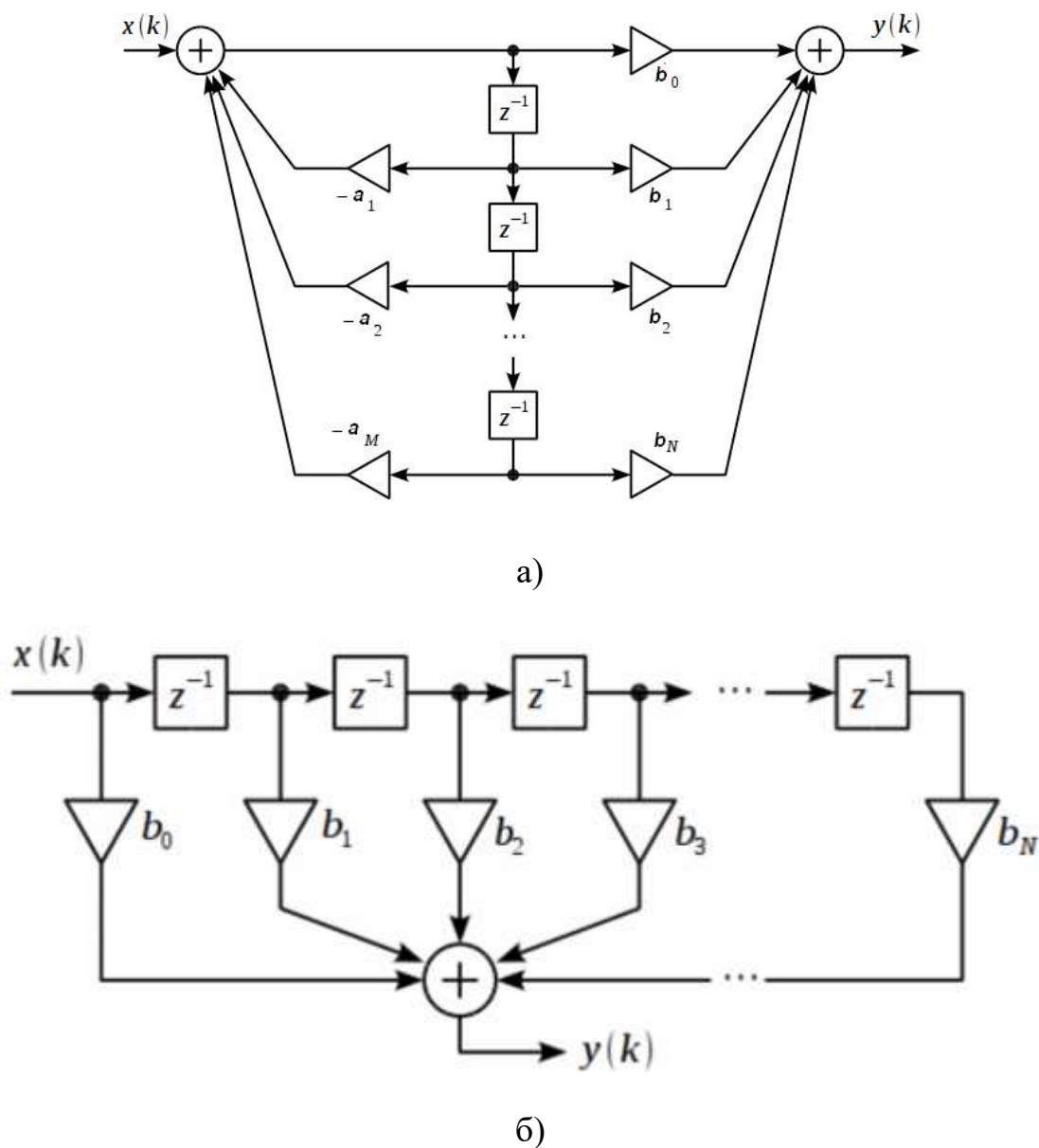


Рисунок 15 – Структурные схемы реализации фильтров: а) прямая реализация БИХ-фильтра (каноническая); б) структурная схема не рекурсивного КИХ-фильтра

Цифровой фильтр задается своей передаточной характеристикой $H(z)$, которая представляет отношение z -образов выходного сигнала ко входному. Для ее нахождения необходимо проделать ряд операций. Для расчета цифрового фильтра низких частот (например, Баттерворта) необходимо

произвести пересчет параметров коридора АЧХ (рис. 16) цифрового фильтра в параметры коридора АЧХ аналогового фильтра необходимо исходные данные задать относительно нормированной частоты в интервале от 0 до π рад/с. Поскольку фильтр цифровой и его АЧХ является периодической с периодом 2π и симметрична относительно нормированной частоты.

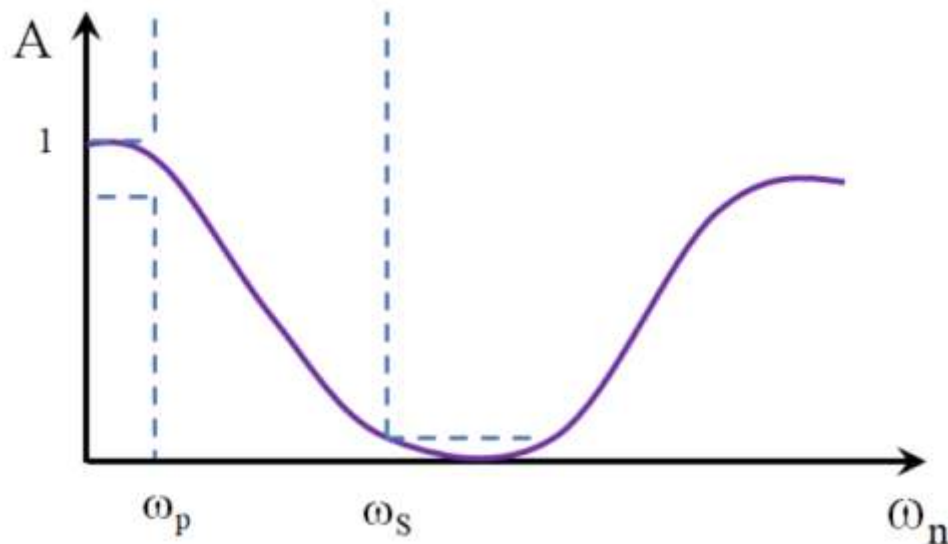


Рисунок 16 – Исходные данные для расчета цифрового ФНЧ относительно нормированной частоты

Для получения дискретного фильтра с заданными частотами среза необходимо скорректировать частоты среза аналогового прототипа, чтобы компенсировать искажения частотной оси. Искажение шкалы частот при билинейном преобразовании происходит согласно выражению:

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan(w_n / 2) \quad (12)$$

где $T=1/F_d$, s^{-1} – интервал (шаг) дискретизации, Ω – шкала частот аналогового фильтра, $w_n = w_{ns} = 2\pi w_s / F_d$ – нормированная шкала частот цифрового фильтра ($w_n = w_{np} = 2\pi w_p / F_d$). По этой формуле рассчитывают

скорректированные частоты для проектирования аналогового прототипа. В частности, частота гарантированного затухания определяется

$$\Omega_s = 2F_d \tan(w_{ns} / 2) \approx 245.1203 \text{ рад/сек} .$$

Частота подавления:

$$\Omega_p = 2F_d \tan(w_{np} / 2) \approx 785.0442 \text{ рад/сек} .$$

Порядок ФНЧ равен

$$N = \frac{\ln(\varepsilon_s / \varepsilon_p)}{\ln(\Omega_p / \Omega_s)} ,$$

$$\text{где } \varepsilon_s = \sqrt{10^{R_s/10} - 1}, \quad \varepsilon_p = \sqrt{10^{R_p/10} - 1} .$$

Расчет коэффициентов ПФ ЦФ и его моделирование в ПП Matlab подробно рассмотрено в расчетной графической работе, в итоге работы фильтра низких частот мы наблюдаем изменение сигнала во временной и частотной области (рис. 17).

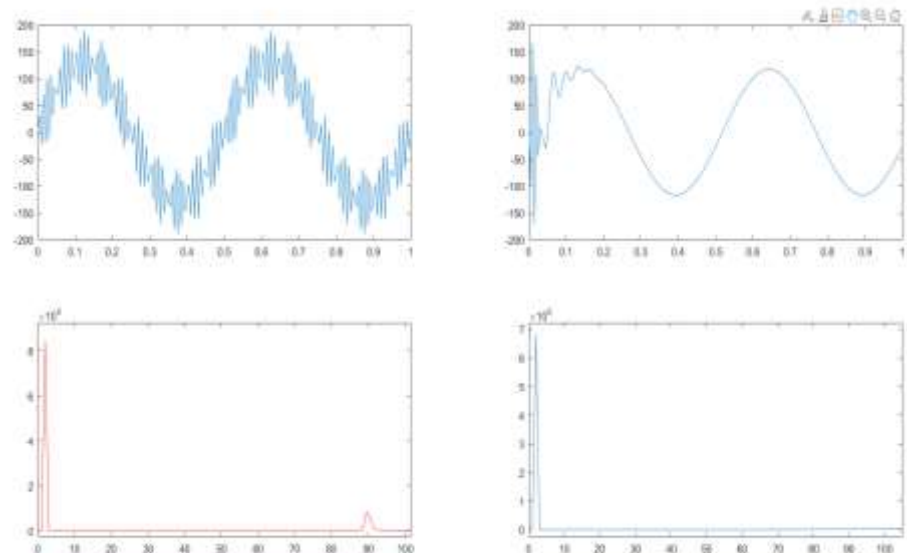


Рисунок 17 – Свойства исходного и отфильтрованного сигнала

Из приведенных иллюстраций можно сделать вывод, что высокочастотные колебания во входных данных полностью фильтруются с помощью разработанного ФНЧ.

9. Корреляционная обработка сигналов

В данной теме будут рассмотрены лишь основные понятия корреляционного анализа сигналов, так как в полной мере их статистический анализ относится к дисциплине «Теория случайных процессов». Изображение типов корреляции и когерентности представлена на рисунке 18. Ковариация и корреляция — это два термина, которые одновременно близки и противоположны друг другу, они оба используются в статистике и регрессионном анализе, ковариация показывает нам, как две переменные сигнала отличаются друг от друга, тогда как корреляция показывает нам взаимосвязь между двумя переменными и как они связаны.

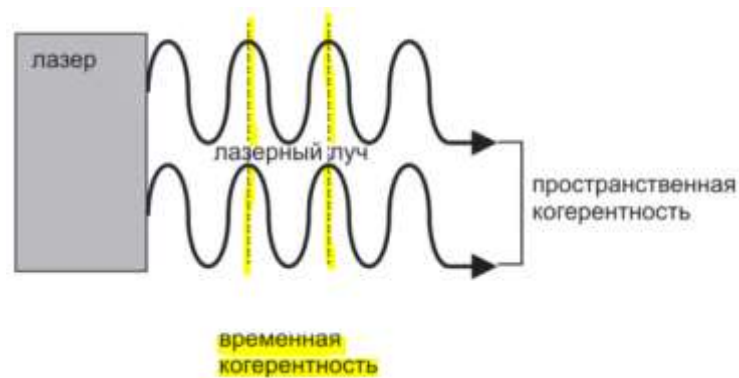
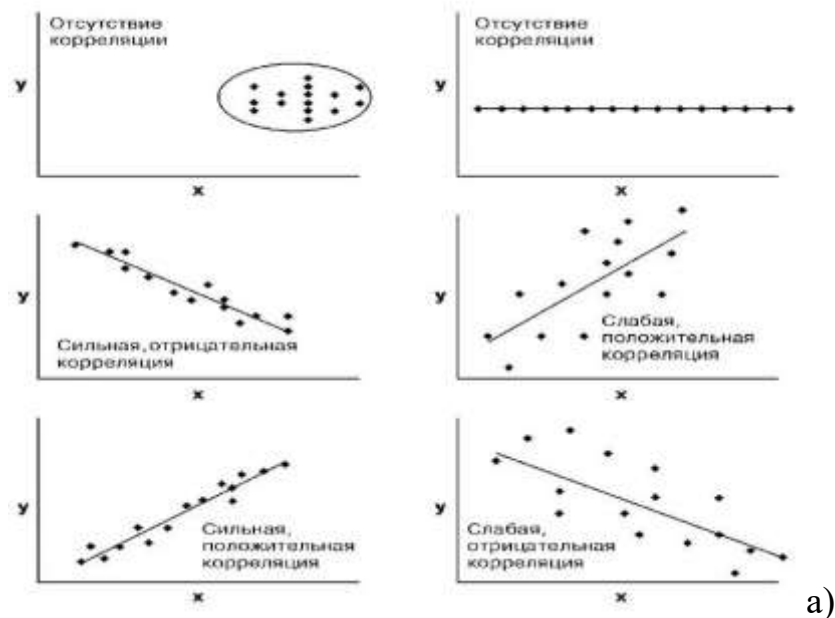


Рисунок 18 – Иллюстрация типов корреляции и когерентности сигналов

Корреляция и ковариация — это две статистические концепции, которые используются для определения взаимосвязи между двумя случайными величинами. Корреляция определяет, как изменение одной переменной повлияет на другую, а ковариация определяет, как два элемента изменяются вместе. Ковариация измеряет, как две переменные движутся относительно друг друга, и является расширением концепции дисперсии (которая говорит о том, как изменяется одна переменная). Может принимать любое значение от $-\infty$ до $+\infty$. Чем выше это значение, тем более зависимы отношения. Положительное число означает положительную ковариацию и указывает на прямую связь. Фактически это означает, что увеличение одной переменной также приведет к соответствующему увеличению другой переменной, если другие условия останутся постоянными. С другой стороны, отрицательное число означает отрицательную ковариацию, которая указывает на обратную связь между двумя переменными. Хотя ковариация идеально подходит для определения типа отношений, она плохо подходит для интерпретации их величины. Оценка степени статистической зависимости мгновенных значений какого-либо процесса $X(t)$ в произвольные моменты времени t_1 и t_2 задается функцией ковариации:

$\text{cov}(X_1, X_2) = M\{(X_1 - M\{X_1\})(X_2 - M\{X_2\})\}$, где M — математическое ожидание сигналов.

Корреляция — это количественное определение взаимосвязи между двумя случайными величинами. Проще говоря, это единичная мера того, как эти переменные изменяются относительно друг друга (нормализованное значение ковариации). В отличие от ковариации, у корреляции есть верхний и нижний предел диапазона. Он может принимать только значения от $+1$ до -1 . Корреляция $+1$ указывает на то, что случайные величины имеют прямую и сильную связь. С другой стороны, корреляция -1 указывает на то, что

существует сильная обратная зависимость, и увеличение одной переменной приведет к равному и противоположному уменьшению другой переменной. 0 означает, что эти два числа независимы.

Формула взаимной корреляции двух сигналов:

$$r_{12} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2(n) \quad (13)$$

Нормирующий множитель $1/N$ применяется для исключения влияния длительности последовательностей. В терминах функционального пространства сигналов корреляция может быть выражена как косинус угла между векторами. Следовательно, при полном совпадении сигналов степень их связи будет принимать положительное единичное значение, при полной противоположности сигналов - отрицательную единицу, а при полном несовпадении - нулевое значение.

Автокорреляционная функция (АКФ) - показывает зависимость между сигналом и его копией, сдвинутой по времени. АКФ находит применение в кодировании информации. Выбор кодирующей последовательности по параметрам длины, частоты и формы во многом обусловлен корреляционными свойствами этой последовательности. Наилучшая кодовая последовательность обладает наименьшим значением вероятности ложного обнаружения или срабатывания (для детектирования сигналов, для пороговых устройств) или ложной синхронизации (для передачи и приема кодовых последовательностей). Автокорреляционная функция помогает находить повторяющиеся участки во временной последовательности, с помощью АКФ можно находить несущую частоту сигнала. Поскольку АКФ есть произведение сигнала и его копии, то физический смысл АКФ - энергия сигнала. В частности, в нулевой момент времени ($n=0$) АКФ равна энергии сигнала.

Свойства автокорреляционной функции:

- Симметричная.
- Четная.
- Максимум функции относится к нулю.
- АКФ периодической последовательности - периодическая функция.
- АКФ суммы двух некоррелированных сигналов - сумма АКФ этих сигналов.
- АКФ бесконечного во времени белого шума имеет пик в нулевом значении и нули во всех остальных.

Когерентность – функция, объединяющая спектральные и корреляционные характеристики процессов и характеризующая корреляцию между процессами отдельно в каждой спектральной полосе. Функция когерентности является мерой (нормированной 0..1) линейной связи двух сигналов на заданной частоте f . В случае линейных систем функция когерентности достигает своего теоретического максимума, равного единице на всех частотах. Функция когерентности находится как

$$G_{XY}(\omega) = \frac{|S_{XY}(\omega)|^2}{S_{XX}(\omega)S_{YY}(\omega)}$$

где $S_{XY}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xy}(n)e^{-j\omega n}$ – кросс-спектральная плотность, $S_{XX}(\omega)S_{YY}(\omega)$

– автоспектры сигналов X и Y соответственно.

Если же функция когерентности меньше единицы, то одной из возможных причин этого может служить отсутствие линейной зависимости выхода от входа рассматриваемой системы, то есть нелинейность системы. Временная функция когерентности позволяет судить о корреляции спектральных компонент сигнала во времени, пространственная – о корреляции

спектральных компонент сигналов в пространстве. Пространственная функция когерентности используется при анализе акустических характеристик помещений и в методах обработки сигналов микрофонных решеток.

10. Контрольные вопросы по темам дисциплины

- Классификация цифровых сигналов. Линейные, нелинейные, стационарные, стохастические.
- Аналоговые, дискретные и цифровые сигналы. Типы и их основные характеристики.
- Дискретизация и квантование сигнала. Математическое описание преобразований.
- Квантование сигнала. Способы квантования.
- Простейшие преобразования над дискретными последовательностями
- Структура системы цифровой обработки сигналов.
- Математическое описание стандартных дискретных последовательностей.
- Необходимые условия для цифровой обработки сигналов в режиме реального времени.
- Свертка дискретных сигналов. Задачи применения. Линейная свертка.
- Теорема Уиттекера – Котельникова – Шеннона–Найквиста.
- Спектральное представление сигнала. Амплитудный и фазовый спектр.
- Разложение сигнала в ряд Фурье.
- Алиасинг. Причины возникновения и способы его предотвращения.
- Двумерное преобразование Фурье. Спектральный анализ изображений
- Основные типы искажений при аналого-цифровом преобразовании. Способы их устранения.
- Фильтрация сигналов. Основные виды фильтров.
- Понятия корреляция, ковариация и когерентность сигналов. Функции для вычисления трех параметров в Матлабе.
- Z-преобразование дискретных сигналов.
- Свойства Z-преобразования.

- Фильтрация сигналов: БИХ и КИХ фильтры. Математическое описание и структурная схема фильтра.

Список используемых источников

1. Айфичер Э., Джервис Б. Цифровая обработка сигналов, практический подход (2-е изд., 2004) – 989 с.
2. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник. – М.: Высш. школа., 1983. – 536 с.
3. Петровский А. А. Теория и применение цифровой обработки сигналов. Лабораторный практикум: пособие/ А. А. Петровский, М. И. Вашкевич, И.С. Азаров. Минск : БГУИР, 2016. – 87 с.
4. Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2013. – 608 с.: ил.
5. Дьяконов В. П. MATLAB. Обработка сигналов и изображений. Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2002. – 608 с.: ил.
6. Трофименко В.Н. Устройства цифровой обработки сигналов: Синтез фильтров: Лабораторный практикум. - Ростов-на-Дону, РАС ЮРГУЭС, 2008 г. – 54 с.
7. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов: Пер. с англ. - М.: Техносфера, 2006. - 856 с.
8. С.Л.Марпл Цифровой спектральный анализ и его приложения. М. – Мир, 1990. – 621 с.
9. Alexander Karitanov. Основы цифровой обработки сигналов. [Электронный ресурс]. URL: <https://github.com/hukenovs/dsp-theory/>
- 10.Dsplib. Теория и практика ЦОС. [Электронный ресурс]. URL: <http://dsplib.ru/links.html>